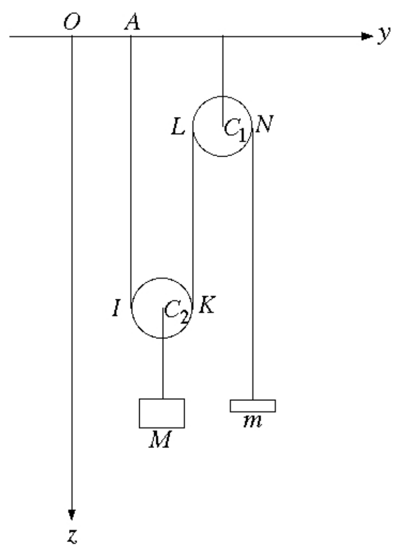
Étude d'un palan

Une poulie $\mathcal{P}_1$ de masse μ, de rayon R, de centre C_1 et de moment d'inertie J par rapport à son axe est accrochée au plafond par un fil inextensible. Un autre fil inextensible, souple, de masse négligeable, accroché au plafond en un point A passe au-dessous d'une poulie $\mathcal{P}_2$, de centre C_2 et identique à la première et supportant une masse M, puis au-dessus de $\mathcal{P}_1$ et supporte en son extrémité une masse m. Les points d'accrochage de $\mathcal{P}_1$ et du fil sont placés en sorte que celui-ci soit vertical (sauf les portions en contact avec les poulies). On remarquera que la poulie $\mathcal{P}_2$ peut alors se déplacer verticalement. Le fil est suffisamment rugueux pour ne pas glisser sur les poulies. On repère la position de la masse m par sa cote z de son centre de gravité G, l'axe Oz est descendant et a son origine au plafond. On choisit Ox perpendiculaire au plan de figure vers l'arrière et donc Oy horizontal vers la droite dans le plan de figure. On note I et K les points de contact des brins verticaux du fil avec $\mathcal{P}_2$ ainsi que L et N ceux avec $\mathcal{P}_1$.



Question 1 :
Étude cinématique*[1] *: exprimer en fonction de $\dot z$ la vitesse de C_2 et les vecteurs rotation des poulies.

La clef est l'inextensibilité du fil. Sur un brin vertical, deux points quelconques du fil sont à distance constante donc ont la même vitesse. Par continuité les deux extrémités de ce brin ont même vitesse. Par exemple le point N et l'extrémité attachée à la masse m. Par ailleurs, le fil ne glisse pas sur la poulie, donc le point de la poulie en contact avec N a aussi la même vitesse, soit puisque z est la cote de la masse :

$$\overrightarrow{v}_{N\in\mathcal{P}_1} = \overrightarrow{v}_{N\in fil} = v_m = \dot z\,\overrightarrow{e_z}$$

de la même façon, on a aussi

$$\overrightarrow{v}_{L\in\mathcal{P}_1} = \overrightarrow{v}_{L\in fil} = \overrightarrow{v}_{K\in fil} = \overrightarrow{v}_{K\in\mathcal{P}_2}$$

et

$$\overrightarrow{v}_{I\in\mathcal{P}_2} = \overrightarrow{v}_{I\in fil} = \overrightarrow{v}_{A\in fil} = \overrightarrow{0}$$

Il ne reste plus qu'à utiliser la formule du champ des vitesses d'un solide ; pour la poulie $\mathcal{P}_1$ de

[1] Étude des vitesses ; cinématique = géométrie + temps

centre C_1 immobile et de vecteur rotation $\overrightarrow{\omega}_1 = \omega_1\,\overrightarrow{e_x}$, on a, d'une part

$$\overrightarrow{v}_{N\in\mathcal{P}_1} = \overrightarrow{v}_{C_1\in\mathcal{P}_1} + \overrightarrow{NC_1}\wedge\overrightarrow{\omega_1}$$

$$\dot z\,\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{0} - R\,\overrightarrow{e_y}\wedge\omega_1\,\overrightarrow{e_x} = R\,\omega_1\,\overrightarrow{e_z} \qquad \text{d'où} \qquad \omega_1 = \frac{\dot z}{R}$$

et d'autre part

$$\overrightarrow{v}_{L\in\mathcal{P}_1} = \overrightarrow{v}_{C_1\in\mathcal{P}_1} + \overrightarrow{LC_1}\wedge\overrightarrow{\omega_1} = \overrightarrow{0} + R\,\overrightarrow{e_y}\wedge\omega_1\,\overrightarrow{e_x} = -R\,\omega_1\,\overrightarrow{e_z} = -\dot z\,\overrightarrow{e_z}$$

pour la seconde poulie, d'une part

$$(\overrightarrow{v}_{L\in\mathcal{P}_1} =)\,\overrightarrow{v}_{K\in\mathcal{P}_2} = \overrightarrow{v}_{I\in\mathcal{P}_2} + \overrightarrow{KI}\wedge\overrightarrow{\omega}_2$$

$$-\dot z\,\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{0} - 2\,R\,\overrightarrow{e_y}\wedge\omega_2\,\overrightarrow{e_x} = 2\,R\,\omega_2\,\overrightarrow{e_z} \qquad \text{d'où} \qquad \omega_2 = -\frac{\dot z}{2\,R}$$

et d'autre part

$$\overrightarrow{v}_{C_2\in\mathcal{P}_2} = \overrightarrow{v}_{I\in\mathcal{P}_2} + \overrightarrow{C_2I}\wedge\overrightarrow{\omega}_2$$

$$\overrightarrow{v}_{C_2} = \overrightarrow{0} - R\,\overrightarrow{e_y}\wedge\omega_2\,\overrightarrow{e_x} = R\,\omega_2\,\overrightarrow{e_z} = -\frac{\dot z}{2}\,\overrightarrow{e_z}$$

Question 2 :
Étude cinétique[2] : exprimer en fonction de $\dot z$ l'énergie cinétique du système constitué du fil, des deux masses et des deux poulies.

Le fil a une masse négligeable donc une énergie cinétique négligeable.

La masse m est en translation à la vitesse $\dot z\,\overrightarrow{e_z}$, son énergie cinétique est $\frac{1}{2}\,m\,\dot z^2$.

La masse M est en translation à la vitesse $-\frac{\dot z}{2}\,\overrightarrow{e_z}$, son énergie cinétique est $\frac{1}{8}\,M\,\dot z^2$.

La poulie $\mathcal{P}_1$ est en rotation autour d'un axe *fixe* à la vitesse angulaire $\omega_1 = \frac{\dot z}{R}$, son énergie cinétique est $\frac{1}{2}\,J\,\omega_1^2 = \frac{1}{2}\,\frac{J}{R^2}\,\dot z^2$.

La poulie $\mathcal{P}_2$, de centre C_2 (de vitesse $-\frac{1}{2}\,\dot z\,\overrightarrow{e_z}$) est en rotation autour d'un axe *mobile* à la vitesse angulaire $\omega_2 = -\frac{\dot z}{2\,R}$ son énergie cinétique est $\frac{1}{2}\,\mu\,\overrightarrow{v_{C_2}}^2 + \frac{1}{2}\,J\,\omega_2^2$ soit $\frac{1}{8}\,\mu\,\dot z^2 + \frac{1}{8}\,\frac{J}{R^2}\,\dot z^2$.

Au total on a donc

$$E_{cin} = \frac{1}{2}\,\left(m + \frac{1}{4}\,M + \frac{1}{4}\,\mu + \frac{5}{4}\,\frac{J}{R^2}\right)\,\dot z^2$$

Question 3 :
Étude dynamique[3] : exprimer en fonction de z l'énergie potentielle de pesanteur. En déduire l'accélération de la masse m (les liaisons des poulies sont supposées parfaites). A quelle condition le mouvement se fait-il vers le bas ? En profiter pour rappeler l'intérêt du palan, puis son inconvénient.

[2] Étude des grandeurs liées aux vitesses et aux masses : quantité de mouvement, moment cinétique, énergie cinétique ; cinétique = cinématique + masses

[3] Étude des forces et recherche du mouvement ; dynamique = cinétique + forces

Attention, l'axe Oz est orienté vers le bas, donc les énergies sont en $-m\,g\,z$.

Le fil a une masse négligeable donc une énergie potentielle négligeable.

La masse m a la cote z donc l'énergie potentielle $-m\,g\,z$.

La masse M est en translation à la vitesse $-\dot{z}/2$ donc en intégrant une cote $a - z/2$ où a est une constante qu'il n'est guère utile de calculer et qui dépend des positions initiales non précisées dans l'énoncé, d'où une énergie potentielle $-M\,g\,(a - z/2)$.

Même raisonnement pour le centre de la poulie $\mathcal{P}_2$ de masse μ, donc l'énergie potentielle $-\mu\,g\,(b-z/2)$ où b est une autre constante.

Le centre de la poulie $\mathcal{P}_1$ de masse μ est fixe, donc l'énergie potentielle $-\mu\,g\,c$ où c est une constante.

Au total, ne regroupant les constantes sous un nom unique (E_0)

$$E_{pot} = E_0 - \left(m - \frac{1}{2}\,M - \frac{1}{2}\,\mu\right)\,g\,z$$

Le système est conservatif car le fil ne glisse pas, les liaisons sont parfaites et, plus subtilement, le fil est souple et ne gaspille pas d'énergie en se courbant à la traversée de la poulie. L'énergie mécanique, somme des énergies cinétique et potentielle, est donc constante et sa dérivée est nulle, soit

$$\left(m + \frac{1}{4}\,M + \frac{1}{4}\,\mu + \frac{5}{4}\,\frac{J}{R^2}\right)\,\dot{z}\,\ddot{z} - \left(m - \frac{1}{2}\,M - \frac{1}{2}\,\mu\right)\,g\,\dot{z} = 0$$

soit après simplification par $\dot{z}$, un mouvement uniformément varié d'accélération

$$\ddot{z} = \frac{m - \frac{1}{2}\,M - \frac{1}{2}\,\mu}{m + \frac{1}{4}\,M + \frac{1}{4}\,\mu + \frac{5}{4}\,\frac{J}{R^2}}\,g$$

Pour que m descende et M monte, il faut et il suffit que m soit supérieure à $(M + \mu)/2$, c'est-à-dire la moitié de la masse qui monte, poulie comprise.

L'intérêt du palan c'est que pour élever une masse de poids $(M + \mu)\,g$, il suffit d'exercer une force $m\,g$ deux fois plus petite ; l'inconvénient est que pour l'élever d'un mètre, il faut tirer deux mètres de fil (voir l'expression de la cote de C_2).

Question 4 :
Par cruauté mentale, l'examinateur accroche un ressort de raideur k entre le sol et la masse M et vous demande la période des oscillations. Que lui répondre ?

On commence par lui répondre : «Voilà un problème très intéressant et je vous remercie de me l'avoir posé».

Ensuite on ajoute l'énergie élastique du ressort. Si H est la hauteur entre sol et plafond et si le ressort est accroché sous M à une distance fixe ℓ de C_2, sa longueur est

$$L = H - (z_{C_2} + \ell) = H - (b - \frac{z}{2} + \ell) = L_1 + \frac{z}{2}$$

avec $L_1 = H - b - \ell$. Si L_0 est la longueur à vide, $L - L_0$ l'allongement et k la raideur, l'énergie élastique est

$$E_{el} = \frac{1}{2}\,k\,(L - L_0)^2 = \frac{1}{2}\,k\,\left(L_1 - L_0 + \frac{z}{2}\right)^2$$

Dans l'expression de la dérivée temporelle de l'énergie, on rajoute le terme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_{el} = k\,\left(L_1 - L_0 + \frac{z}{2}\right)\,\frac{\dot{z}}{2}$$

et après simplification par $\dot{z}$, l'équation du mouvement devient

$$\left(m + \frac{1}{4}\,M + \frac{1}{4}\,\mu + \frac{5}{4}\,\frac{J}{R^2}\right)\,\ddot{z} - \left(m - \frac{1}{2}\,M - \frac{1}{2}\,\mu\right)\,g + \frac{1}{2}\,k\,\left(L_1 - L_0 + \frac{z}{2}\right) = 0$$

$$\left(m + \frac{1}{4}\,M + \frac{1}{4}\,\mu + \frac{5}{4}\,\frac{J}{R^2}\right)\,\ddot{z} + \frac{1}{4}\,k\,z = \left(m - \frac{1}{2}\,M - \frac{1}{2}\,\mu\right)\,g - \frac{1}{2}\,k\,(L_1 - L_0)$$

de la forme $M^*\,\ddot{z} + k^*\,z = F^*$, dont la solution est $z = F^*/k^* + A\,\cos(\omega\,t + \varphi)$, où A et φ dépendent des conditions initiales et $\omega^2 = k^*/M^*$.